Математика
Урок № 41   група 12

Тема уроку. Екстремальні точки. Локальний екстремум функції.

I. Розв'яжіть вправу.

Знайдіть проміжки монотонності функцій:

а) $f(x) = x^3 - 5x^2 - 32x + 9$; б) $f(x)=\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x+5$.

Відповіді: а) функція зростає на кожному із проміжків $(-\infty; -2)$, $\left(\frac{16}{3}; +\infty\right)$; спадає на проміжку $\left(-2; \frac{16}{3}\right)$; б) функція зростає на кожному із проміжків $(-\infty; -1)$, $(3; +\infty)$; спадає на проміжку $(-1; 3)$.

II. Сприймання і усвідомлення поняття точок екстремуму та екстремуму функції.

При дослідженні поведінки функції в деякій точці зручно користуватися поняттям околу. Околом точки *a* називається будь-який інтервал, що містить цю точку. Наприклад, інтервали (2; 5), (2,5; 3,5), (2,9; 3,1) – околи точки 3.

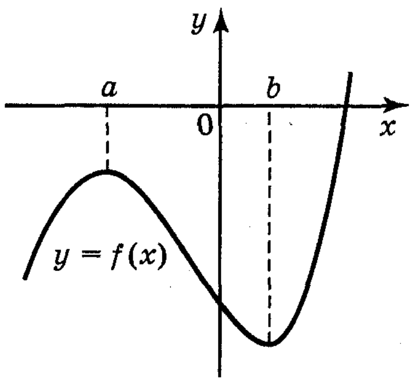

Рис. 38

Розглянемо графік функції, зображений на рис. 38. Як видно із рисунка, існує такий окіл точки $x = a$, що найбільше значення функція $y = f(x)$ в цьому околі набуває в точці $x = a$. Точку $x = a$ називають точкою максимуму цієї функції.

Аналогічно точку $x = b$ називають точкою мінімуму функції $y = f(x)$, оскільки значення функції в цій точці найменше порівняно зі значеннями функції в деякому околі точки *b*.

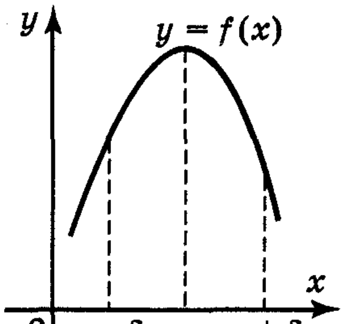

Рис. 39

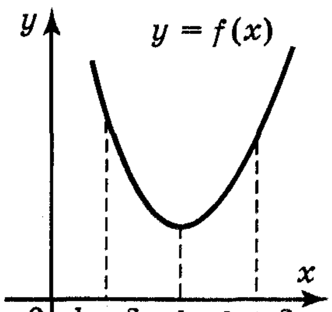

Рис. 40

Означення. Точка *a* із області визначення функції *f(x)* називається точкою максимуму цієї функції, якщо існує такий окіл точки *a,* що для всіх $x \neq a$ із цього околу виконується нерівність $f(x) < f(a)$. (Рис. 39).

Означення. Точка *b* із області визначення функції *f(x)* називається точкою мінімуму цієї функції, якщо існує такий окіл точки *b,* що для всіх $x \neq b$ із цього околу виконується нерівність $f(x) < f(b)$. (Рис. 40).

Точки максимуму і точки мінімуму називають точками екстремуму функції, а значення функції в цих точках називають екстремумами функції (максимум і мінімум функції).

Точки максимуму позначають x_{max} , а точки мінімуму — x_{min} . Значення функції в цих точках, тобто максимуми і мінімуми функції, позначаються відповідно: y_{max} і y_{min}.

Виконання вправ

1. Для функцій, графіки яких зображено на рисунках 41, α—*г* знайдіть:
1) точки максимуму і мінімуму функції;
2) екстремуми функції.

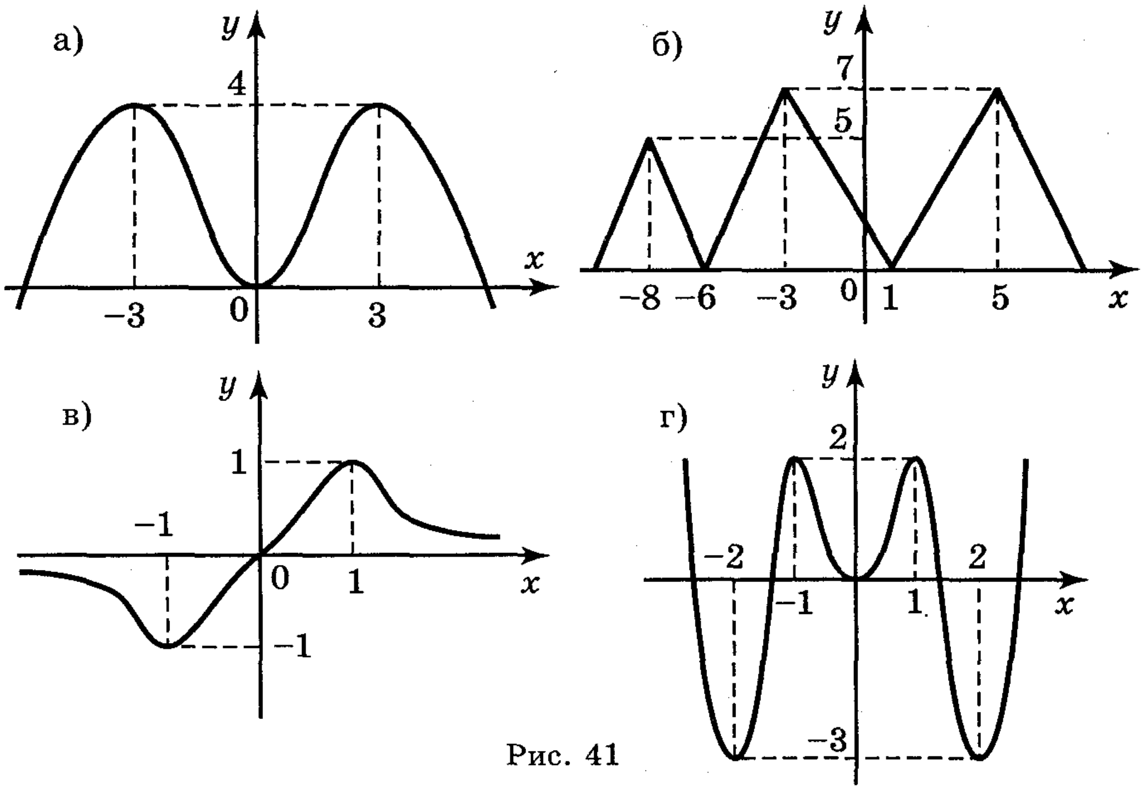

Рис. 41

Відповідь: 1) а) x_{max}= 3, x_{min}= 0, x_{max}= 3; *б)* x_{max}= – 8, x_{min}= – 6; x_{max}= – 3; x_{min} = 1; x_{max}= 5; в) x_{min}= –1; x_{max}= 1; г) x_{min}= –2; x_{max}= –1; x_{min}= 0; x_{max}= 1; x_{min}= 2;
2) а) y_{max}= 4; y_{min}=*0*; б) y_{max}= *5;* y_{max}= *7;* y_{min}= 0; в) y_{min}= –1; y_{max}= 1; г) y_{min} = –3; y_{min}= 0; y_{max}= 2.

III. Сприймання і усвідомлення необхідної умови екстремуму, поняття стаціонарної точки.

Розглянемо функцію $y = f(x)$, яка визначена в деякому околі точки x_o і має похідну в цій точці.

Якщо x_o — точка екстремуму диференційованої функції $y = f(x)$, то $f'(x_o) = 0$.

Це твердження називають теоремою Ферма на честь П'єра Ферма (1601—1665) — французького математика.

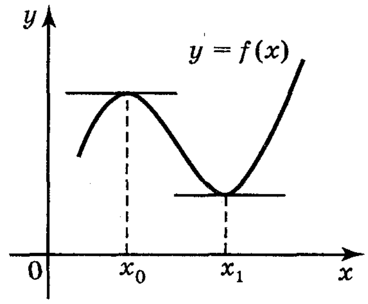

Рис. 42

Теорема Ферма має наочний геометричний зміст: в точці екстремуму дотична паралельна осі абсцис, і тому її кутовий коефіцієнт $f'(x_o)$ дорівнює нулю (рис. 42).

Наприклад, функція $f(x) = x^2 - 2$ має в точці $x_o = 0$ мінімум (рис. 43), її похідна $f'(0) = 0$. Функція $f(x) = 1 - x^2$ (рис. 44) має максимум у точці $x_o = 0$, $f(x) = -2x$ і $f'(0) = 0$.

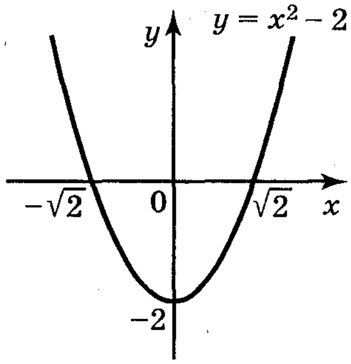

Рис. 43

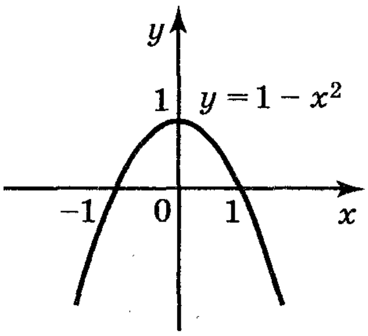

Рис. 44

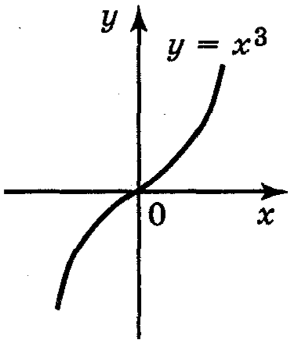

Рис. 45

Слід зазначити, що якщо $f'(x_o) = 0$, то x_o не обов'язково є точкою екстремуму.

Наприклад, якщо $f(x) = x^3$, то $f`(x) = 3x^2$ і $f`(x_o) = 0$. Проте точка $x = 0$ не є точкою екстремуму, оскільки функція $f(x) = x^3$ зростає на всій числовій осі (рис. 45).

Отже, точки екстремуму диференційованої функції треба шукати тільки серед коренів рівняння $f'(x) = 0$, але не завжди корінь рівняння $f'(x) = 0$ є точкою екстремуму.

Внутрішні точки області визначення функції $y = f(x)$, у яких похідна дорівнює нулю, називають стаціонарними. Отже, для того щоб точка x_o була точкою екстремуму, необхідно, щоб вона була стаціонарною.

Виконання вправ

1. Знайдіть стаціонарні точки функції:

а) $y = 5 + 12x - x^3$; б) $y = 9 + 8x^2 - x^4$; в) $y = e^{2x} - 2e^x$·, г) $y = \sin x - \cos x$.

Відповідь: а) $x = \pm 2$; *б)* $x = 0$, $x = \pm 2$; в) $x = 0$; г) $x = -\dfrac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in Z$.

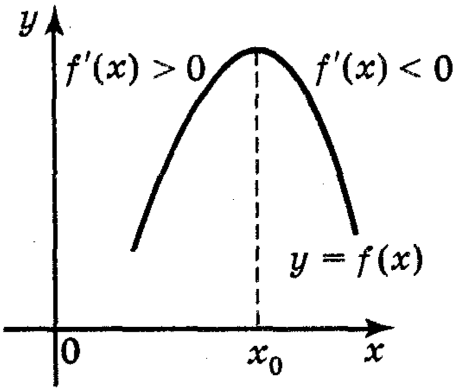

Рис. 46

IV. Сприймання і усвідомлення достатньої ознаки екстремуму функції.

Сформулюємо достатні умови того, що стаціонарна точка є точкою екстремуму, тобто умови, при виконанні яких стаціонарна точка є точкою максимуму або мінімуму функції.

Якщо похідна ліворуч стаціонарної точки додатна, а праворуч — від'ємна, тобто при переході через цю точку похідна змінює знак з «+» на «–», то ця стаціонарна точка є точкою максимуму (рис. 46).

Дійсно, в цьому випадку ліворуч стаціонарної точки функція зростає, а праворуч — спадає, отже, дана точка є точка максимуму.

Якщо похідна ліворуч стаціонарної точки від'ємна, а праворуч — додатна, тобто при переході через стаціонарну точку похідна змінює знак з «–» на «+», то ця стаціонарна точка є точка мінімуму (рис. 47).

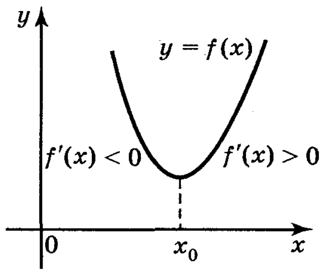

Рис. 47

Якщо при переході через стаціонарну точку похідна не змінює знак, тобто ліворуч і праворуч від стаціонарної точки похідна додатна або від'ємна, то ця точка не є точкою екстремуму.

V. Практична робота.

1. Зразок розв'язування прикладів з даної теми

Приклад 1. Знайдіть точки екстремуму функції $f(x) = x^3 - 3x$.

Розв'язання

Область визначення даної функції — R.

Знайдемо $f`(x)$: $f`(x) = (x^3 - 3x)' = 3x^2 - 3$.

Похідна існує для всіх $x \in R$.

Знайдемо стаціонарні точки: $f(x) = 0$, $3x^2 - 3 = 0$, $x^2 - 1 = 0$, $x = \pm 1$.

Наносимо область визначення та стаціонарні точки на координатну пряму (рис. 48) і визначимо знак похідної на кожному проміжку:

$f`(-2) = 3 \cdot (-2)^2 - 3 = 9 > 0;$

$f`(0) = 3 \cdot (0)^2 - 3 = -3 < 0;$

$f`(2) = 3 \cdot (2)^2 - 3 = 9 > 0.$

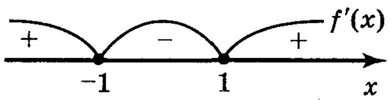

Рис. 48

Точка $\chi = -1$ є точкою максимуму, бо похідна при переході через цю точку змінює знак з «+» на «-»: $x_{max} = -1$.

Точка $x = 1$ — є точкою мінімуму, бо похідна при переході через цю точку змінює знак з «-» на «+»: $x_{min} = 1$.

Відповідь: $x_{max} = -1$, $x_{min} = 1$.

Приклад 2. Знайдіть екстремуми функції $f(x) = x^4 - 4x^3$.

Розв'язання

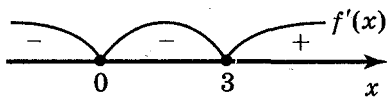

Рис. 49

Область визначення функції — R.

Знайдемо похідну:

$f`(x) = (x^4 - 4x^3) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x - 3)$.

Знайдемо стаціонарні точки: $f`(x) = 0$, $4x^2(x - 3) = 0$, $x = 0$ або $x = 3$.

Наносимо стаціонарні точки на координатну пряму (рис. 49) та визначаємо знак похідної на кожному інтервалі.

$x = 3$ — точка мінімуму, бо при переході через цю точку похідна змінює знак з «–» на «+»: $x_{min} = 3$.

Точка $x = 0$ не є точкою екстремуму, бо похідна не змінює знак при переході через цю точку.

Отже, $y_{min} = f(3) = 3^4 - 4 \cdot 3^3 = -27$.

Відповідь: $y_{min} = f(3) = -27$.

2. Виконання вправ

Виконати вправи № 472, 475 із § 25, ст. 152.

Запитання і завдання для повторення ст. 151..