

Тема уроку. Диференціювання функцій (теореми про похідну суми, добутку і частки функцій).

I. Повторюємо таблицю

$(C)' = 0;$	$(x)' = 1;$
$(x^n)' = n \cdot x^{n-1};$	$(\sin x)' = \cos x;$
$(\cos x)' = -\sin x;$	$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x};$
$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x};$	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$

II. Перевірте чи правильно виконано.

1) Знайдіть похідні функцій а) $y = x^{10}$; б) $y = -\frac{1}{x^9}$; в) $y = \frac{x}{x^5}$; г) $y = x^2 \cdot x$.

Відповідь: а) $10x^9$; б) $-9x^{-10}$; в) $-4x^{-5}$; г) $3x^2$.

2) Знайдіть похідні функцій:

а) $y = \sin x$ в точці $x = \frac{\pi}{2}$; б) $y = \cos x$ в точці $x = \frac{\pi}{4}$;

в) $y = \operatorname{tg} x$ в точці $x = \frac{\pi}{3}$; г) $y = \operatorname{ctg} x$ в точці $x = \frac{\pi}{2}$.

Відповіді: а) 0; б) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) 4; г) -1.

III. Вивчаємо новий матеріал.

Теорема 1. Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ диференційовані в точці x , то їхня сума диференційована в цій точці і $(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$. або коротко говорять: похідна суми дорівнює сумі похідних.

Наслідки

а) Похідна різниці дорівнює різниці похідних. Нехай $y(x) = f(x) - g(x)$, тоді $f(x) = y(x) + g(x)$ і $f'(x) = y'(x) + g'(x)$, звідси $y'(x) = f'(x) - g'(x)$.

б) Похідна суми декількох функцій дорівнює сумі похідних цих функцій, тобто $(f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x))' = f_1'(x) + f_2'(x) + \dots + f_n'(x)$.

Приклад. Знайдіть похідні функцій

а) $f(x) = x^3 - x^2 + x - 4$; б) $f(x) = \cos x + \sin x + 5$; в) $f(x) = x^6 + \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x$.

Розв'язання

а) $f'(x) = (x^3 - x^2 + x - 4)' = (x^3)' - (x^2)' + (x)' - 4' = 3x^2 - 2x + 1 + 0 = 3x^2 - 2x + 1$;

б) $f'(x) = (\cos x + \sin x + 5)' = (\cos x)' + (\sin x)' + 5' = -\sin x + \cos x + 0 = \cos x - \sin x$.

в) $f'(x) = (x^6 + \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x)' = (x^6)' + (\operatorname{tg} x)' - (\operatorname{ctg} x)' = 6x^5 + \frac{1}{\cos^2 x} - \left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right) =$
 $= 6x^5 + \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} = 6x^5 + \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} = 6x^5 + \frac{4}{4\cos^2 x \cdot \sin^2 x} = 6x^5 + \frac{4}{\sin^2 2x}$.

Відповідь: а) $f'(x) = 3x^2 - 2x + 1$; б) $f'(x) = \cos x - \sin x$; в) $f'(x) = 6x^5 + \frac{4}{\sin^2 2x}$.

Виконайте вправи.

1. Знайдіть похідні функцій:

а) $y = x^3 + x - x^4$; б) $y = \sin x - \cos x$; в) $y = -x^3 + \operatorname{tg} x$; г) $y = \operatorname{ctg} x - \sqrt{x}$. *Відповідь:* а) $y' = 3x^2 + 1 - 4x^3$; б) $y' = \cos x + \sin x$;

в) $y' = -3x^2 + \frac{1}{\cos^2 x}$; г) $y = -\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

2. Знайдіть значення похідної функції $f(x)$ в точці x_0 :

а) $f(x) = \sin x + x^2, x_0 = 0$; б) $f(x) = \cos x - 1, x_0 = \frac{\pi}{4}$; в) $f(x) = x^2 + x - 7, x_0 = -1$.

Відповідь: а) 1; б) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) -1.

3. При яких значеннях x значення похідної функції $f(x)$ дорівнює 0:

а) $f(x) = x^3 - x$; б) $f(x) = x^2 + x$; в) $f(x) = x - \cos x$?

Відповідь: а) $x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$; б) $x = -\frac{1}{2}$; в) $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Теорема 2. Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ диференційовані в точці x , то їхній добуток також – диференційована функція в цій точці і

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x),$$

або коротко говорять: похідна добутку двох функцій дорівнює сумі добутків кожної функції на похідну другої функції.

Наслідки

а) Постійний множник можна винести за знак похідної: $(cf(x))' = cf'(x)$.

б) Похідна добутку декількох множників дорівнює сумі добутків похідної кожного із них на всі останні, наприклад:

$$(f(x) \cdot g(x) \cdot h(x))' = f'(x) \cdot g(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot g'(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot g(x) \cdot h'(x).$$

Приклад. Знайдіть похідні функцій:

а) $y = x \cdot \sin x$; б) $y = 5x^5 + 6x^2 + 2x - 7\operatorname{tg} x$; в) $y = (x-1)(x+2) \cdot \cos x$.

Розв'язання

а) $y' = (x \sin x)' = x' \sin x + x (\sin x)' = 1 \cdot \sin x + x \cos x = \sin x + x \cos x$;

б) $y' = (5x^5 + 6x^2 + 2x - 7 \operatorname{tg} x)' = (5x^5)' + (6x^2)' + (2x)' - (7 \operatorname{tg} x)' = 5 \cdot (x^5)' + 6 \cdot (x^2)' + 2 \cdot x' - 7 \cdot (\operatorname{tg} x)' =$
 $= 5 \cdot 5x^4 + 6 \cdot 2 \cdot x + 2 \cdot 1 - 7 \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = 25x^4 + 12x + 2 - \frac{7}{\cos^2 x}$;

в) $y' = ((x-1)(x+2)\cos x)' = (x-1)'(x+2)\cos x + (x-1)(x+2)'\cos x + (x-1)(x+2) \cdot (\cos x)' =$
 $= 1 \cdot (x+2)\cos x + (x-1) \cdot 1 \cdot \cos x + (x-1)(x+2) \cdot (-\sin x) = (x+2)\cos x + (x-1)\cos x - (x-1)(x+2)\sin x = (2x+1)\cos x - (x-1)(x+2)\sin x.$

Виконайте вправи.

1. Знайдіть похідну функцій:

а) $y = 3x^2 - 5x + 6$; б) $y = -2x^3 + 3\cos x$; в) $y = 5x^2 + \frac{6}{x^2} + 3\operatorname{ctg} x$; г) $y = 3x \cdot x^2 + 9 \frac{x^2}{x^4}$.

Відповідь: а) $6x - 5$; б) $-6x^2 - 3\sin x$; в) $10x - \frac{12}{x^3} - \frac{3}{\sin^2 x}$; г) $9x^2 - \frac{18}{x^3}$

2. Знайдіть похідні функцій:

а) $y = \sqrt{x} \sin x$; б) $y = x^2 \cos x$; в) $y = \frac{\sin x}{x^6}$; г) $y = x^2 \sqrt{x} \sin x$.

Відповідь: а) $y' = \frac{\sin x}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x} \cos x$; б) $y' = 2x \cos x - x^2 \sin x$;

в) $y' = \frac{-6 \sin x}{x^7} + \frac{\cos x}{x^6}$; г) $y' = 2x \sqrt{x} \sin x + \frac{x^2 \sin x}{2\sqrt{x}} + x^2 \sqrt{x} \cos x$.

Теорема 3. Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ диференційовані в точці x і $g(x) \neq 0$, то функція $y = \frac{f(x)}{g(x)}$

диференційована в цій точці і
$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}.$$

Приклад. Знайдіть похідні функцій а) $y = \frac{x^3}{x^2 + 1}$; б) $y = \frac{x^3}{\sin x}$.

Розв'язання

$$\text{а) } y' = \left(\frac{x^3}{x^2 + 1}\right)' = \frac{(x^3)'(x^2 + 1) - x^3(x^2 + 1)'}{(x^2 + 1)^2} = \frac{3x^2(x^2 + 1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x^4 + 3x^2}{(x^2 + 1)^2}.$$

$$\text{б) } y' = \left(\frac{x^3}{\sin x}\right)' = \frac{(x^3)' \sin x - x^3(\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{3x^2 \sin x - x^3 \cos x}{\sin^2 x}.$$

Виконайте вправи.

1. Знайдіть похідні функцій:

$$\text{а) } y = \frac{x+1}{x-1}; \quad \text{б) } y = \frac{x^2+x}{x^2-x}; \quad \text{в) } y = \frac{3x-1}{3x+1}; \quad \text{г) } y = \frac{x^2}{x-1}.$$

Відповідь: а) $y' = \frac{-2}{(x-1)^2}$; б) $y' = \frac{-2}{(x-1)^2}$; в) $y' = \frac{6}{(3x+1)^2}$; г) $y' = \frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$.

2. Знайдіть похідні функцій: а) $\frac{1+\cos x}{\sin x}$; б) $\frac{\sin x - \cos x}{x}$; в) $\frac{x}{\sin x}$; г) $\frac{\cos x}{x^2}$.

Відповідь: а) $\frac{-1-\cos x}{\sin^2 x}$; б) $\frac{x \cos x + x \sin x - \sin x + \cos x}{x^2}$; в) $\frac{\sin x - x \cos x}{\sin^2 x}$;

г) $\frac{-\sin x \cdot x^2 - 2x \cos x}{x^4} = \frac{-x \sin x - 2 \cos x}{x^3}$.

IV. Запам'ятайте таблицю

Правила диференціювання

$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x);$ $(Cf(x))' = C \cdot f'(x);$ $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x);$ $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$
--

V. Домашнє завдання.

Опрацюйте матеріал § 23, ст. 138.