Математика
Урок № 23 група 23 9. 04. 2020

Тема уроку: Первісна. Таблиця первісних.

І. Сприймання і усвідомлення поняття первісної.

При вивченні теми «Похідна» ми розв'язували задачу про знаходження швидкості прямолінійного руху по заданому закону зміни координати *s(t)* матеріальної точки. Миттєва швидкість *v*(*t*) дорівнює похідній функції *s(t),* тобто *v(t) = s'(t).*

У практиці зустрічається обернена задача: по заданій швидкості *v(t)* руху точки знайти пройдений нею шлях *s(t),* тобто знайти таку функцію *s(t)*, похідна якої дорівнює *v*(*t*). Функцію s(*t*) таку, що *s'(t) = v(t),* називають первісною функції *v(t).* Наприклад, якщо *v{t) = gt,* то *s(t)* = $\frac{gt^2}{2}$ є первісною функції *v(t),* оскільки $g'(t) = \left(\frac{gt^2}{2}\right)^I = \frac{g\cdot 2t}{2} = gt = v(t)$.

Функція *F(x)* називається *первісною* функції *f(x)* на деякому проміжку, якщо для всіх *х* із цього проміжку виконується рівність: *F'(X) = f(x).*

Знаходження за даною функцією f(x) її первісної F(x)- операція, обернена до диференціювання і її називають *інтегруванням.*

Наприклад, функція *F(x)* = sin *x* є первісною функції *f(x) = cos x* для *х* є *R,* бо (sin *x)'* = cos *x;* функція *F(x) = tg x* є первісною функції *f(x)* = $\frac{1}{cos^2 x}$, бо *F'(x) = (tgx)'* = $\frac{1}{cos^2 x}$ = *f(x)* для всіх *x,* крім *x* = $\frac{\pi}{2}$ + *πn, n* є *Z.*

ІІ. Виконання вправ

Покажіть, що функція *F(x)* є первісною функції *f(x)* для вказаних значень *x:*

1. *F(x) = kx, f(x) = k, x* є R.
2. *F(x)* = $\frac{x^{n+1}}{n+1}$, *f(x)* = x^n, *x* є (0; +∞), *n* ≠ *-1.*
3. *F(x)* = $ln|x|$, *f(x)* = $\frac{1}{x}$, *x* ≠ *0.*
4. *F(x)* = e^x, *f(x)* = e^x, *x є R.*
5. *F(x)*= $\frac{a^x}{\ln a}$, *f(x)*=a^x, *x є R.*
6. *F(x) = -cos x, f(x) = sin x, x є R.*
7. *F(x) = -ctg x, f(x)* = $\frac{1}{\sin^2 x}$, *x* ≠ *πn.*

ІІІ. Усвідомлення основної властивості первісної

Розглянемо функцію *f(x)* = x^2. Доведемо, що функції $F_1(x) = \frac{x^3}{3}$, $F_2(x) = \frac{x^3}{3} + 2$,

$F_3(x) = \dfrac{x^3}{3} - 5$ є первісними функції *f(x)*.

Дійсно, $F_1^I(x) = \left(\dfrac{x^3}{3}\right)^I = \dfrac{3x^2}{3} = x^2 = f(x)$, $F_2^I(x) = \left(\dfrac{x^3}{3} + 2\right)^I = x^2 + 0 = x^2 = f(x)$,

$F_3^I(x) = \left(\dfrac{x^3}{3} - 5\right)^I = x^2 - 0 = x^2 = f(x)$.

Взагалі будь-яка функція $F(x) = \dfrac{x^3}{3}$ + C, де C — постійна, є первісною функції x^2. Це випливає з того, що похідна постійної дорівнює нулю.

Цей приклад свідчить, що для заданої функції первісна визначається неоднозначне.

Теорема 1. Нехай функція *F(x)* є первісною для *f(x)* на деякому проміжку. Тоді для довільної постійної C функція *F(x) + C* також є первісною для функції *f(x)*.

Доведення

Оскільки *F(x)* — первісна функції *f(x)*, то *F'(x) = f(x)*.

Тоді *(F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x) + 0 = f(x)*, а ця рівність означає, що *F(x) + C* є первісною для функції *f(x)*.

Теорема 2. Нехай функція *F(x)* є первісною для *f(x)* на деякому проміжку. Тоді будь-яка первісна для функції *f(x)* на цьому проміжку може бути записана у вигляді *F(x) + C*, де C — деяка стала (число).

Доведення

Нехай *F(x)* і $F_1(x)$ — дві первісні однієї і тієї самої функції *f(x)*, тобто $F^I(x) = f(x)$, $F_1^I(x) = f(x)$. Похідна різниці $g(x) = F(x) - F_1(x)$ дорівнює нулю, оскільки $g'(x) = F_1^I(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$. Якщо $g'(x) = 0$ на деякому проміжку, то дотична до графіка функції *y = g(x)* у кожній точці цього проміжку паралельна осі *OX*. Тому графіком функції *y = g(x)* є пряма, яка паралельна осі *OX*, тобто *g(x)* = C, де *C* — деяка стала. Із рівностей *g(x) = C*, $g(x) = F_1(x) - F(x)$ випливає, що $F_1(x) - F(x) = C$, або $F_1(x) = F(x) + C$.

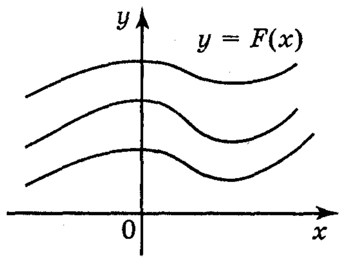

Рис. 87

Теореми 1 і 2 виражають основну властивість первісної.

Основній властивості первісної можна надати геометричного змісту: графіки будь-яких двох первісних для функції *f* одержуються один із одного паралельним перенесенням вздовж осі *OY* (рис. 87).

IV. Сприймання і усвідомлення таблиці первісних (таблиці невизначених інтегралів).

Користуючись таблицею похідних, можна скласти таблицю первісних (для функцій, похідні яких відомі.

Таблиця первісних

Функція $f(x)$	Загальний вигляд первісних $F(x) + C$
0	C
1	$x + C$
$x^n\ (n \neq -1)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln \lvert x \rvert + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x + C$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x + C$
e^x	$e^x + C$
a^x	$\frac{a^x}{\ln a} + C$

Опрацювати матеріал § 5, виконати завдання № 190-192, ст. 45-47.