Урок № 9 група МШЛП – 11 27. 10. 2020

Тема уроку. Корінь *n*-го степеня. Арифметичний корінь *n*-го степеня і його властивості.

I. Повторення відомостей про квадратний корінь.

Повторити відомості про квадратний корінь можна у вигляді фронтальної бесіди з використанням таблиці 1.

Питання до групи

1. Що називається квадратним коренем з числа?
2. Чому дорівнює квадратний корінь з чисел:
   а) 25; б)16; в) 100; г) 0; д) -10?
3. Чому квадратний корінь з від'ємного числа не існує?
4. Що називається арифметичним квадратним коренем з числа а?
5. При яких значеннях a має смисл вираз $\sqrt{a}$?

Таблиця 1

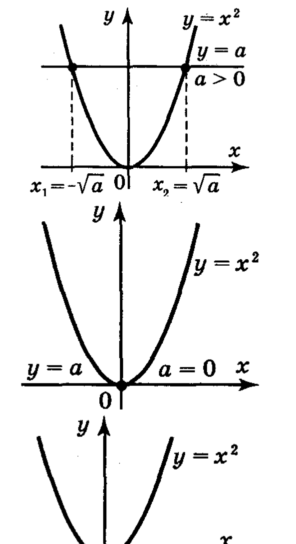
<table>
<tr><td colspan="2">Квадратні корені</td></tr>
<tr><td>

Означення квадратного кореня з числа a:

число, квадрат якого дорівнює a.

Корінь рівняння:

$x^2 = a$.



</td><td>

Означення арифметичного квадратного кореня з числа a:

$$\sqrt{a} = b \Leftrightarrow \begin{cases} b \ge 0, \\ b^2 = a. \end{cases}$$

Тотожності

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a,\ a > 0.$$

$$\sqrt{a^2} = |\,a\,|,\ a \in \mathrm{R}.$$

Основні властивості

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b},\ a \ge 0,\ b \ge 0.$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}},\ a \ge 0,\ b > 0.$$

$$\sqrt{a^{2k}} = a^k,\ a \ge 0,\ k \in \mathrm{N}.$$

$$\left(\sqrt{a}\right)^p = \sqrt{a^p},\ a \ge 0$$

</td></tr>
</table>

II. Сприймання і усвідомлення нового матеріалу (таблиця 2).

Коренем *n*-го степеня із дійсного числа a називається число, *n*-й степінь якого дорівнює a.

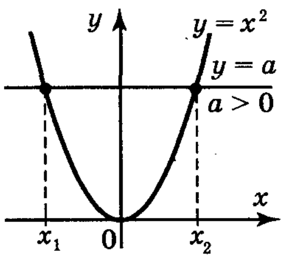
Наприклад: корінь третього степеня із числа 8 дорівнює 2, бо $2^3 = 8$. Корінь четвертого степеня з числа 81 є числа 3 і -3, бо $3^4 = 81$, $(-3)^4 = 81$.

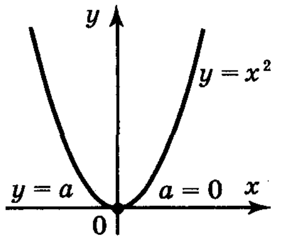
Згідно даного означення, корінь *n*-го степеня — це корінь рівняння $x^n = a$. Число коренів цього рівняння залежить від n і a.

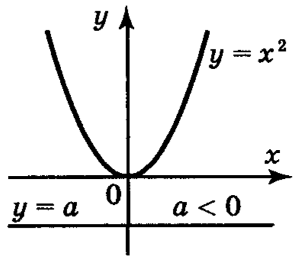
Якщо n — парне, тобто $n = 2k$, $k \in N$, то рівняння $x^{2k} = a$ має два корені, якщо $a > 0$; один корінь, якщо $a = 0$; не має коренів, якщо $a < 0$.

Якщо n — непарне, тобто $n = 2k + 1$, $k \in N$, то рівняння $x^{2k+1} = a$ завжди має лише один корінь.

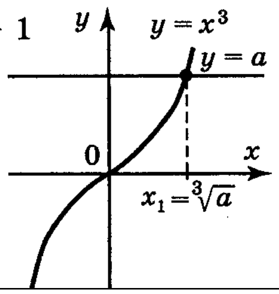
Таблиця 2

<table>
<tr><td colspan="2">Корінь n-го степеня</td></tr>
<tr><td>Означення кореня n-го степеня з числа a:
число, n -й степінь якого дорівнює a.
Корінь рівняння:
$x^2 = a$</td>
<td>Означення арифметичного кореня n-го степеня з числа a:
$\left.\begin{array}{c}\sqrt[n]{a} = b \\ a \ge 0 \\ n \in N, n \ge 2\end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} b \ge 0 \\ b^n = a \end{cases}$</td></tr>
<tr><td>$n = 2k$





</td>
<td>$\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[5]{a}$, …, $\sqrt[2k+1]{a}$ - існують для $a \in R$.
Якщо $a < 0$, то
$\sqrt[2k+1]{a} = -\sqrt[2k+1]{-a}$.
$\sqrt{a}$, $\sqrt[4]{a}$, … , $\sqrt[2k]{a}$ - існують для $a \ge 0$.

Тотожності
Якщо $\sqrt[n]{a}$ існує, то $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$.
$\sqrt[2n]{a^{2n}} = \left|a\right|$, $a \in$ R
$\sqrt[2n+1]{a^{2n+1}} = a$, $a \in$ R.

Основні властивості
$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$, $a \ge 0$, $b \ge 0$.
$\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, $a \ge 0$, $b > 0$.
$\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}$,
$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$,
$\sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m}$.</td></tr>
<tr><td>$n = 2k + 1$

</td><td></td></tr>
</table>

Невід’ємний корінь рівняння $x^n = a$ називають арифметичним коренем *n*-го степеня із числа *a*.

Арифметичним коренем *n*-го степеня із невід'ємного числа *a* називається таке невід'ємне число, *n*-й степінь якого дорівнює *a*.

Арифметичний корінь *n*-го степеня із числа *a* позначають так: $\sqrt[n]{a}$. Число *n* називають показником кореня, число *a* — підкореневим числом (виразом).

Якщо $n = 2$, то замість $\sqrt[2]{a}$ пишуть $\sqrt{a}$ і називають арифметичним квадратним коренем.

Арифметичний корінь третього степеня називають кубічним коренем.

У тих випадках, коли зрозуміло, що мова йде про арифметичний корінь *n*-го степеня, коротко говорять «корінь *n*-го степеня».

Приклад. Знайдемо значення: -

а) $\sqrt[3]{8}$; б) $\sqrt[4]{81}$; в) $\sqrt[5]{1}$; г) $\sqrt[100]{0}$.

а) $\sqrt[3]{8} = 2$, оскільки $2^3 = 8$ і $2 > 0$;

б) $\sqrt[4]{81} = 3$, оскільки $3^4 = 81$ і $3 > 0$;

в) $\sqrt[5]{1} = 1$, оскільки $1^5 = 1$ і $1 > 0$;

г) $\sqrt[100]{0} = 0$, оскільки $0^{100} = 0$.

Корінь парного степеня існує лише з невід'ємних чисел, отже, вираз $\sqrt[2k]{a}$ має смисл, якщо $a \geq 0$ і набуває невід'ємних значень.

Корінь непарного степеня існує з будь-якого дійсного числа і до того ж тільки один.

Для коренів непарного степеня справедлива рівність $\sqrt[2k+1]{-a} = -\sqrt[2k+1]{a}$.
Дійсно $\left(-\sqrt[2k+1]{a}\right)^{2k+1} = (-1)^{2k+1}\left(\sqrt[2k+1]{a}\right)^{2k+1} = -a$.

Рівність $\sqrt[2k+1]{-a} = -\sqrt[2k+1]{a}$ дозволяє виразити корінь непарного степеня з від'ємного числа через арифметичний корінь того ж степеня.

Приклад. Знайдемо значення:

а) $\sqrt[3]{-8}$; б) $\sqrt[5]{-32}$; в) $\sqrt[3]{-27}$.

а) $\sqrt[3]{-8} = -\sqrt[3]{8} = -2$; б) $\sqrt[5]{-32} = -\sqrt[5]{32} = -2$; в) $\sqrt[3]{-27} = -\sqrt[3]{27} = -3$.

Отже, вираз $\sqrt[2k+1]{a}$ має смисл для будь-якого $a \in \mathrm{R}$ і може набувати будь-яких значень.

III. Виконання вправ

1. Розв’яжіть рівняння:

а) $x^3 = 64$; б) $x^5 = -\frac{1}{32}$; в) $x^4 = 81$; г) $x^6 = -64$; д) $x^3 = 15$; е) $x^4 = 15$.

Відповідь: а) 4; б) $-\frac{1}{2}$; в) 3; - 3; г) немає коренів; д) $\sqrt[3]{15}$; е) $\sqrt[4]{15}$; $-\sqrt[4]{15}$.

3. Знайдіть область визначення функцій:

а) $y = \sqrt[4]{x-2}$; б) $y = \sqrt[3]{x-4}$; в) $y = \sqrt[6]{3-x}$;

г) $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{-x}}$; д) $y = \sqrt[6]{x} + \sqrt[4]{-x}$; е) $y = \frac{1}{\sqrt[6]{x}} + \frac{1}{\sqrt[10]{-x}}$

Відповідь: а) $x \geq 2$; б) $x \in \mathrm{R}$; в) $x \leq 3$; г) $x \neq 0$; д) 0; е) не визначена.

Безпосередньо з означення арифметичного кореня *n*-го степеня випливає:

Ми згадали властивості квадратного кореня. Аналогічні властивості мають і корені n-го степеня.

Властивість 1. Для невід'ємних чисел a і b добуток коренів n-го степеня із чисел a і b дорівнює кореню n-го степеня із їх добутку: $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$.

Властивість 2. Для невід'ємного числа a і додатного числа b частка коренів n-го степеня із чисел a і b дорівнює кореню n-го степеня із їх частки: $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$.

1. Якщо $\sqrt[n]{a}$ існує, то $(\sqrt[n]{a})^n = a$.
2. $\sqrt[2k]{a^{2k}}=|a|=\begin{cases} a, \ якщо\, a \ge 0, \\ -a, \ якщо\, a < 0. \end{cases}$
3. $\sqrt[2n+1]{a^{2n+1}}=a$

Властивість 3. Будь-який цілий степінь k кореня n-го степеня із невід'ємного числа a дорівнює кореню n-го степеня із степеня k числа a: $\left(\sqrt[n]{a}\right)^k=\sqrt[n]{a^k}$.

Властивість 4. Щоб добути корінь із кореня із невід'ємного числа можна перемножити показники коренів, а підкореневий вираз залишити без змін: $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[mn]{a}$.

Властивість 5. Значення кореня із степеня невід'ємного числа не зміниться, якщо показник кореня і показник підкореневого виразу помножити (або поділити) на одне і те саме натуральне число: $\sqrt[np]{a^{mp}}=\sqrt[n]{a^m}$.

Властивості 1, 2 доводяться аналогічно тому, як це зроблено для квадратних коренів. Доведемо властивості 3—5:

3) Так як $a \ge 0$, то ліва і права частини формули невід'ємні. Тому для доведення цієї рівності досить впевнитися в тому, що n-ий степінь лівої частини дорівнює a^k. Згідно з властивостями степенів з цілим показником маємо:

$$\left(\left(\sqrt[n]{a}\right)^k\right)^n=\left(\sqrt[n]{a}\right)^{kn}=\left(\left(\sqrt[n]{a}\right)^n\right)^k=a^k$$

4) При $a > O$ ліва і права частини невід'ємні. Тоді

$$\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^{mn}=\left(\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^m\right)^n=\left(\sqrt[n]{a}\right)^n=a$$

Отже, $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$.

5) Згідно з означенням кореня $\sqrt[np]{a^{mp}}$ — це таке невід'ємне число, n-й степінь якого дорівнює a^{mp}, тобто досить довести $\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^{np}=a^{mp}$.

Маємо $\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^{np}=\left(\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^n\right)^p=\left(a^m\right)^p=a^{mp}$.

Виконання вправ

1. Знайдіть значення виразів:

а) $\sqrt[3]{0{,}027\cdot 125}$; б) $\sqrt[4]{256\cdot 0{,}0081}$; в) $\sqrt[3]{\dfrac{125}{1000}}$; г) $\sqrt[4]{\dfrac{625}{16}}$; д) $\sqrt[3]{3\dfrac{3}{8}}$.

Відповідь: а) 1,5; б) 1,2; в) 0,5; г) 2,5; д) $\dfrac{3}{2}$.

2. Обчисліть:

а) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{500}$; б) $\sqrt[4]{324}\cdot\sqrt[4]{4}$; в) $\dfrac{\sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{2}}$; г) $\dfrac{\sqrt[4]{80}}{\sqrt[4]{5}}$.

Відповідь: а) 10; б) 6; в) 3; г) 2.

3. Знайдіть корінь із степеня:

а) $\sqrt[3]{5^9}$; б) $\sqrt[5]{0{,}3^{10}}$; в) $\sqrt[5]{0{,}3^{10}\cdot 2^{15}}$; г) $\sqrt[10]{\left(\dfrac{1}{2}\right)^{20}\cdot 4^{30}}$.

Відповідь: а) 125; б) 0,09; в) 0,72; г) 16.

4. Спростіть вирази:

а) $\sqrt[8]{\sqrt[3]{25}}$; б) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{27}}$; в) $\sqrt[4]{\sqrt{4}}$; г) $\sqrt[3]{\sqrt{5}}$.

Відповідь: а) $\sqrt[24]{25} = \sqrt[12]{5}$; б) $\sqrt[3]{3}$; в) $\sqrt[4]{2}$; г) $\sqrt[6]{5}$.

Домашнє завдання.

§ 2. Вправи № 40, 48, 49.